

La transformée de Fourier rapide et d'une de ses dérivées

par Miles (<http://miles.developpez.com/>) (Blog)

Date de publication : 15/05/2007

Dernière mise à jour :

La transformée de Fourier est un outil mathématique très utilisé. En théorie, elle permet de décrire n'importe quel signal par son spectre de fréquence. *Coolley* et *Tukey* ont proposé un algorithme rapide pour calculer une version discrète.

- I - La transformée de Fourier
 - I-A - La transformée de Fourier continue
 - I-B - Les séries de Fourier
 - I-C - La transformée de Fourier discrète
- II - Utilisation d'une transformée de Fourier dans la réalité
 - II-A - Applications de la transformée de Fourier discrète
 - II-A-1 - Analyse du contenu spectral
 - II-A-2 - L'application courante, la convolution
 - II-B - Les fonctions de fenêtrage
 - II-B-1 - Le fenêtrage rectangulaire
 - II-B-2 - La fenêtre de Hamming
 - II-B-3 - La fenêtre de Hann(ing)
 - II-B-4 - Les fenêtres triangulaire et de Bartlett
 - II-B-5 - Résumé
- III - La transformée de Fourier rapide (Cooley-Tukey)
- CI - Conclusion
- Ref - Références

I - La transformée de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien français qui a démontré que tout signal continu pouvait se décomposer sous la forme de la somme de sinusoides. Cette décomposition est réversible et possède d'autres propriétés - conservation de l'énergie, linéarité de l'opérateur, ... -

I-A - La transformée de Fourier continue

La transformée de continue s'applique aux fonctions de carré intégrable et les représente par une intégrale pondérée d'exponentielles complexes. La formule est la suivante :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

 Dans toutes les formules, la fonction en minuscule indique le signal temporel, la fonction en majuscule le signal spectral (en fréquence).

Pour repasser dans l'espace temporel, la formule ne varie pas trop :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

I-B - Les séries de Fourier

Découvertes avant leur version plus générale, les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique en somme pondérée infinie d'exponentielles complexes de même période. La formule est la suivante, avec $\omega_k = 2\pi k / \tau$ où τ est la période du signal :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{i\omega_k t}$$

I-C - La transformée de Fourier discrète

Si maintenant on discrétise la fonction périodique, on obtient une somme finie d'exponentielles complexes. Cette somme d'exponentielles est elle-même périodique.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$$
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2i\pi \frac{k}{N} n}$$

 On peut remarquer la différence de notation entre la version continue et la version discrète. Elle est standard, les parenthèses sont associées à un signal continu, les crochets à un signal discret.

On constate aussi un facteur d'échelle présent dans la transformée inverse, mais pas dans la directe. En fait, ce facteur est l'équivalent de celui de la version continue, et on pourrait inverser l'application de ce facteur. En revanche, à cause de lui, le théorème de Parseval - non, non, pas Parseval - n'est plus respecté.

II - Utilisation d'une transformée de Fourier dans la réalité

En maths-info, seule la transformée de Fourier discrète est utilisée. En effet, tous les signaux utilisés sont échantillonnés et quantifiés. L'échantillonnage signifie qu'on discrétise l'échelle temporelle ou spatiale - dans le cas d'une image, on travaille sur deux dimensions spatiales, dans le cas d'un signal sonore ou financier, on utilise une dimension temporelle -, la quantification correspond à la discrétisation des valeurs possibles du signal.

II-A - Applications de la transformée de Fourier discrète

II-A-1 - Analyse du contenu spectral

La transformée de Fourier discrète permet d'obtenir un échantillonnage du spectre du signal à transformer. Dans le cas d'un signal multidimensionnel comme une image, on effectuera une transformée de Fourier sur chacune des dimensions. On observera aussi dans ce cas qu'une transformée de Fourier sur une image constituée de lignes sera formée de colonnes, et inversement.

Dans le cas d'une image, on analyse un signal fini dans l'espace. On considère en réalité une image infinie constituée de la même image multipliée à l'infinie, d'après la définition de la transformée de Fourier. En revanche, dans le cas d'un signal sonore par exemple, on analysera des morceaux de signal à chaque fois - naturellement, on peut aussi faire la même chose avec une image, mais c'est moins rentable -. Le signal n'est donc plus identique à chaque fois, c'est ce qui cause le "leakage" d'une fréquence dans tout le spectre (voir la FFT d'un sinus pur et d'un sinus tronqué au paragraphe **II-B-1**).

Ces artefacts impliquent l'utilisation de fonctions de fenêtrage. Chacune de ces fonctions modifie le spectre des fréquences, mais elles permettent d'observer des fonctions non périodiques ou apériodiques en minimisant les problèmes de ruptures aux extrémités de la portion de signal analysée.

II-A-2 - L'application courante, la convolution

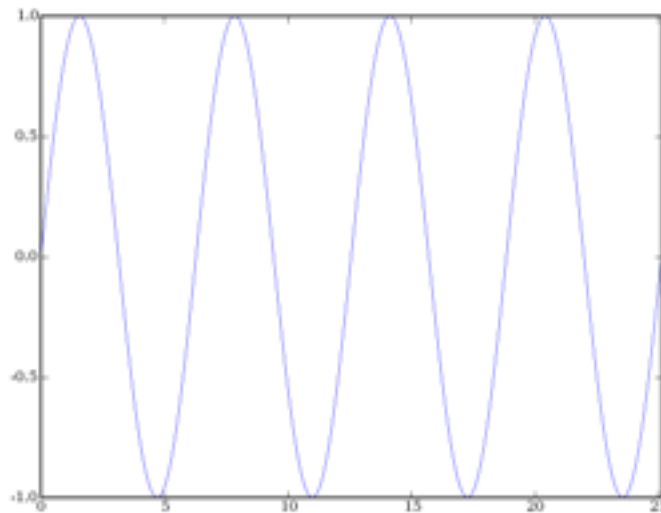
Une convolution dans le domaine réel correspond à une multiplication dans le domaine spectral. De plus, une convolution brute a une complexité en $O(n^2)$ alors qu'une convolution par transformée de Fourier peut avoir une complexité en $O(n \log(n))$ en utilisant la FFT, si n est la dimension du signal.

Pour effectuer une convolution dans le domaine spectral, on doit avoir deux spectres de même dimension. De plus, si un signal de taille n est convolué avec un filtre de taille m , le signal résultant est de taille $n + m - 1$. Dans ce cas, si on prend comme taille de la FFT le maximum de n et m , on obtiendra un signal final périodique de même taille, donc plus petit que la taille du signal résultant par une convolution brute. On est alors en présence d'un repliement de spectre car les échantillons "disparus" sont en fait additionnés aux autres. On augmente alors la taille du signal et celui du filtre en ajoutant des 0 à la fin pour atteindre la taille critique des $n + m - 1$.

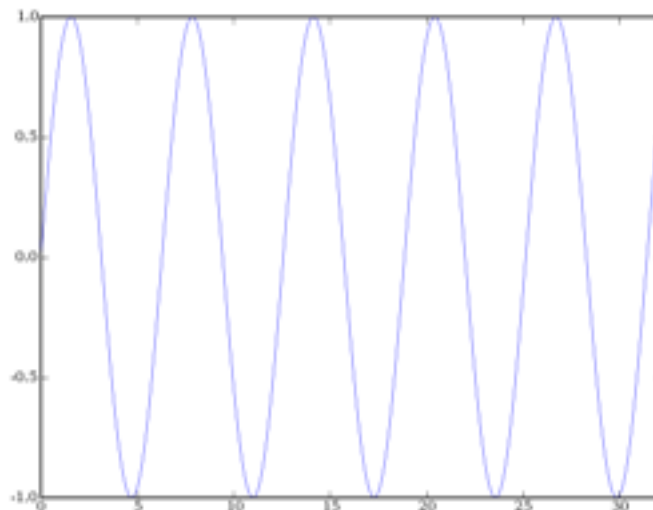
II-B - Les fonctions de fenêtrage

Une fonction de fenêtrage est une fonction par laquelle le signal à analyser est multiplié avant la transformée de Fourier. Cela revient donc à faire une convolution entre les 2 spectres dans l'espace des fréquences. Lors de l'analyse d'une tranche de signal, la transformée de Fourier considère que cette tranche se duplique à l'infini, donc si la tranche n'est pas exactement synchronisée avec le signal (ce qui n'arrive en fait jamais, par exemple un signal à 5Hz vu à travers une fenêtre de 0.5sec), le signal dont on calcule la transformée de Fourier n'est pas celui qui est analysé en réalité... C'est là l'intérêt des fenêtres, qui permettent de rendre continu le signal analysé, en limitant les effets des fonctions de fenêtrage.

Chaque type de fenêtre a des spécificités sur les lobes secondaires et sur le lobe principal (largeur du lobe principal et amortissement des lobes secondaires principalement). Voici les deux signaux qui seront analysés :



Sinus pur

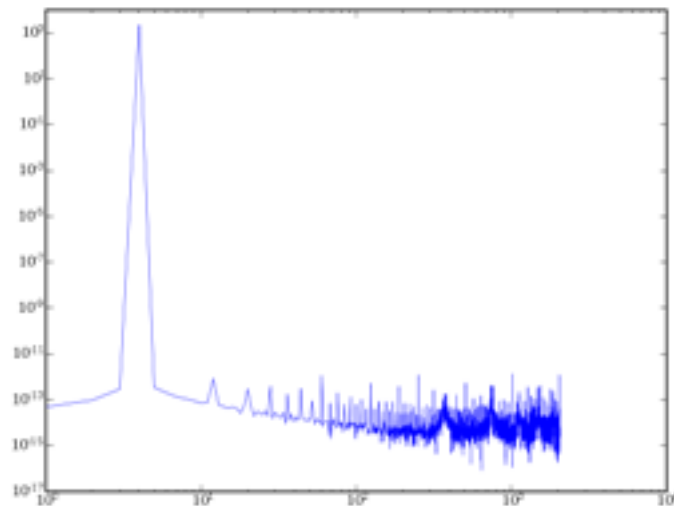


Sinus tronqué

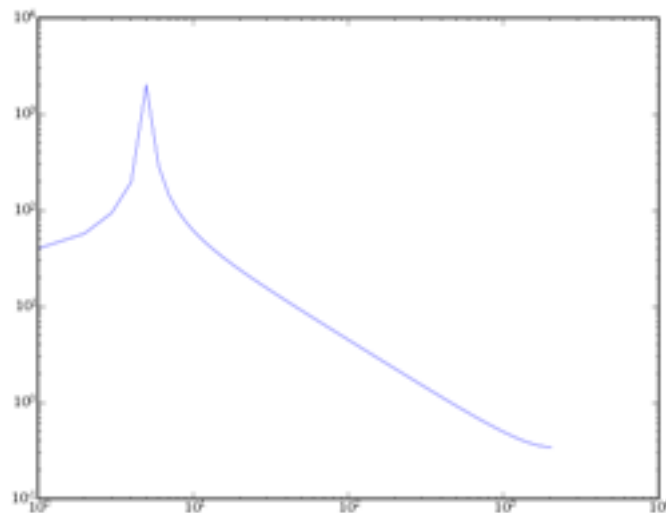
💡 Le lobe principal symbolise la fréquence fondamentale de la sinusoïde analysée (par exemple un sinus à 5Hz possèdera un lobe principal centré autour des 5Hz dans la représentation de Fourier) et les lobes secondaires représentent les "déchets" introduits par la distortion due au fenêtrage (la sinusoïde tronquée n'est plus une sinusoïde du point de vue de la transformée de Fourier).

II-B-1 - Le fenêtrage rectangulaire

La fenêtre rectangulaire est en fait simplement la fenêtre standard utilisée si on ne fait rien. En anglais, il s'agit de la fenêtre *boxcar*. On prend le signal et on regarde une partie, et la partie est sélectionnée par une fenêtre valant 0 ou 1. Le résultat est donc le suivant :



Transformée de Fourier d'un sinus avec une fenêtre rectangulaire



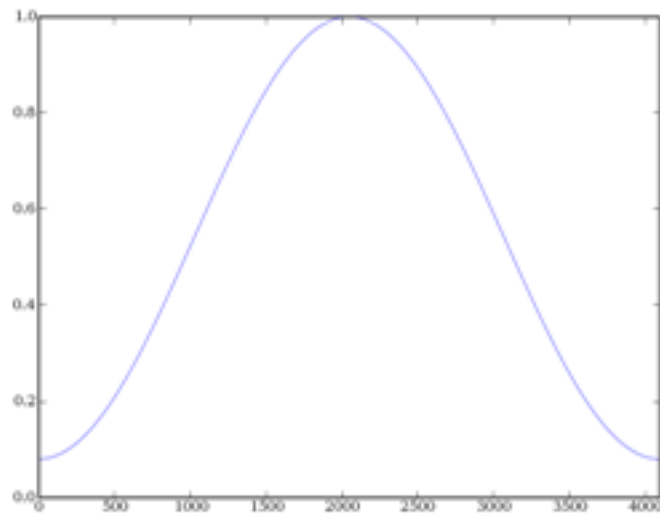
Transformée de Fourier d'un sinus tronqué avec une fenêtre rectangulaire

II-B-2 - La fenêtre de Hamming

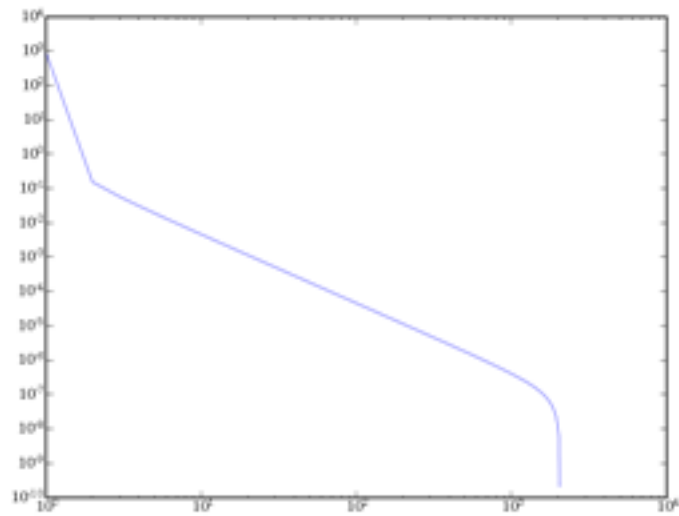
La fenêtre de Hamming est une fenêtre moyenne entre un lob principal étroit et un amortissement modéré des lobes

secondaires. La formule de la fenêtre est la suivante :

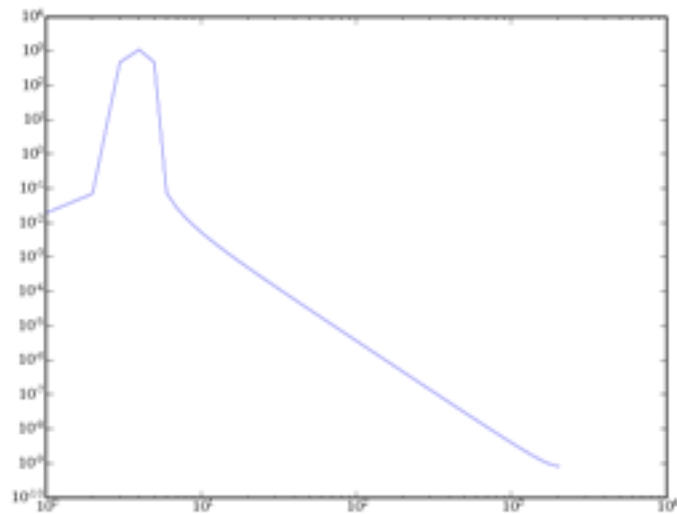
$$w(n) = 0.53836 - 0.46164 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$$



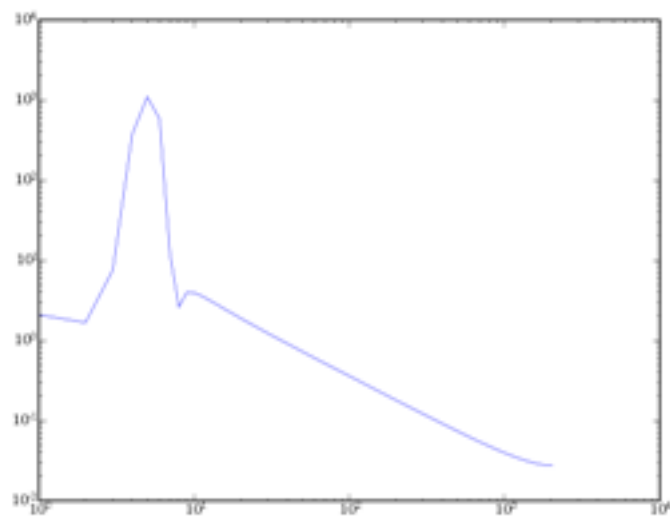
La fenêtre de Hamming



Transformée de Fourier de la fenêtre de Hamming



Transformée de Fourier d'un sinus avec une fenêtre de Hamming



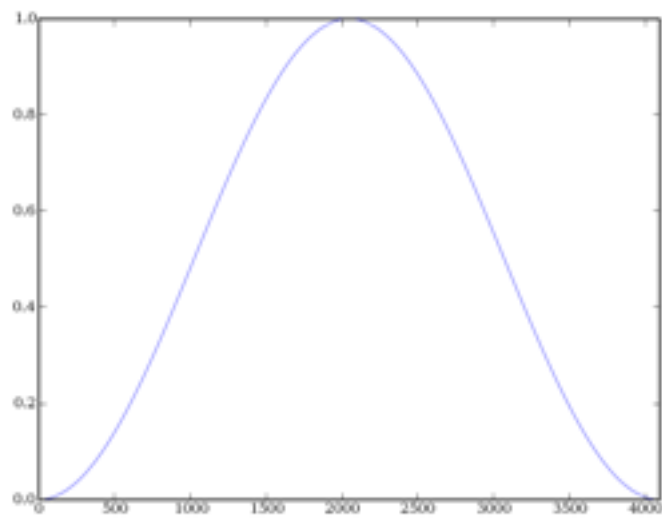
Transformée de Fourier d'un sinus tronqué avec une fenêtre de Hamming

II-B-3 - La fenêtre de Hann(ing)

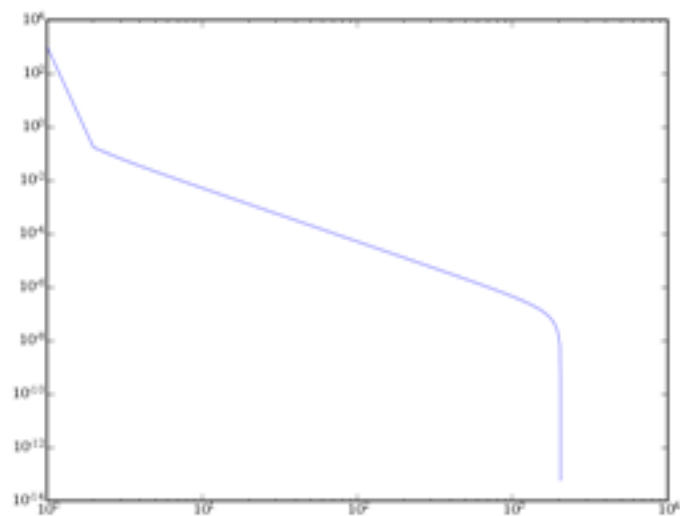
La fenêtre de Hanning (ou plutôt Hann, du nom de son auteur) est elle aussi une fenêtre intermédiaire, comme

Hamming. La formule de la fenêtre est la suivante :

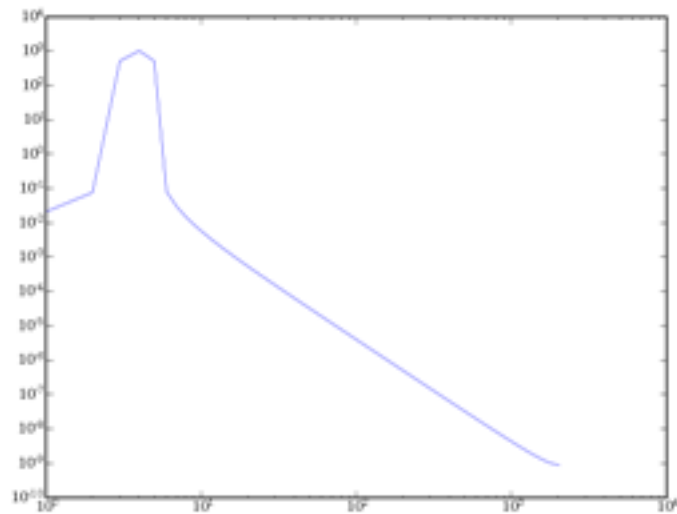
$$w(n) = 0.5 \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right)$$



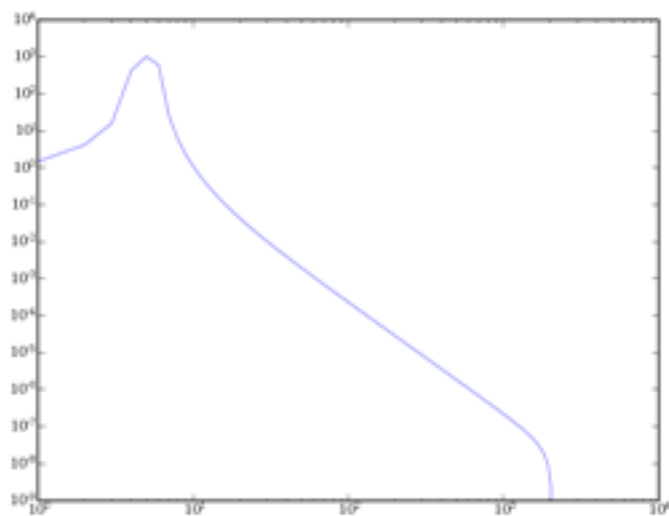
La fenêtre de Hanning



Transformée de Fourier de la fenêtre de Hanning



Transformée de Fourier d'un sinus avec une fenêtre de Hanning



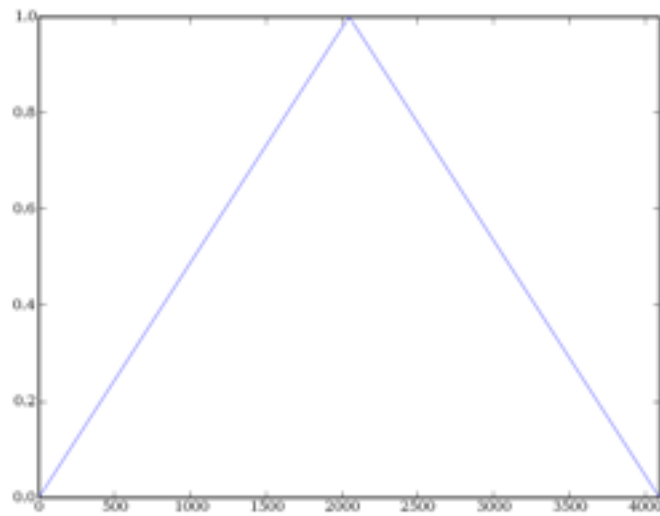
Transformée de Fourier d'un sinus tronqué avec une fenêtre de Hanning

II-B-4 - Les fenêtres triangulaire et de Bartlett

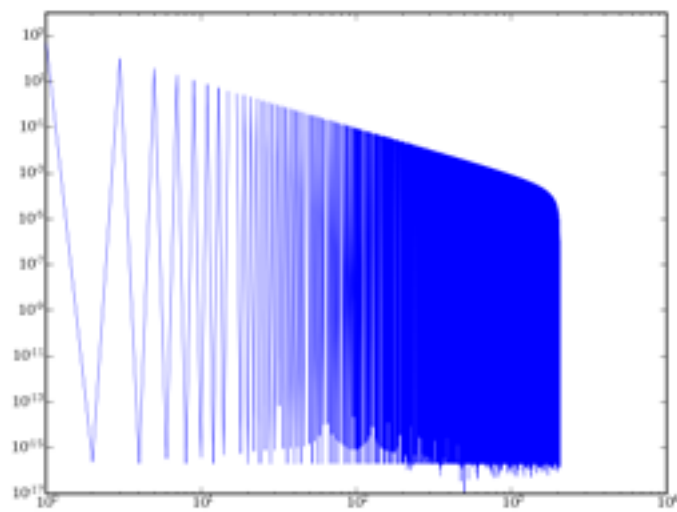
Les fenêtres triangulaire et de Bartlett sont des fenêtres quasiment identiques. La seule différence consiste dans les valeurs minimales et maximales qui sont nulles pour la fenêtre de Bartlett et non nulles pour la fenêtre triangulaire. Cela entraîne une différence pour les valeurs en haute fréquence. La formule de la fenêtre

triangulaire est la suivante : $w(n) = \frac{2}{N} \left(\frac{N-1}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right)$. Celle de la fenêtre de Bartlett est :

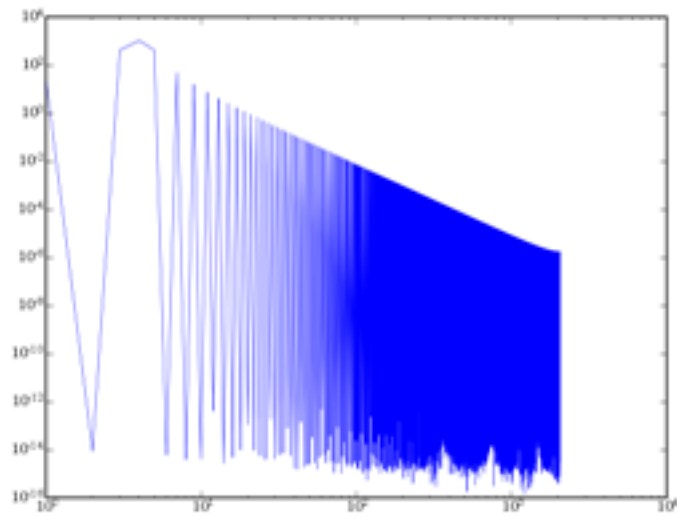
$$w(n) = \frac{2}{N-1} \left(\frac{N-1}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right)$$



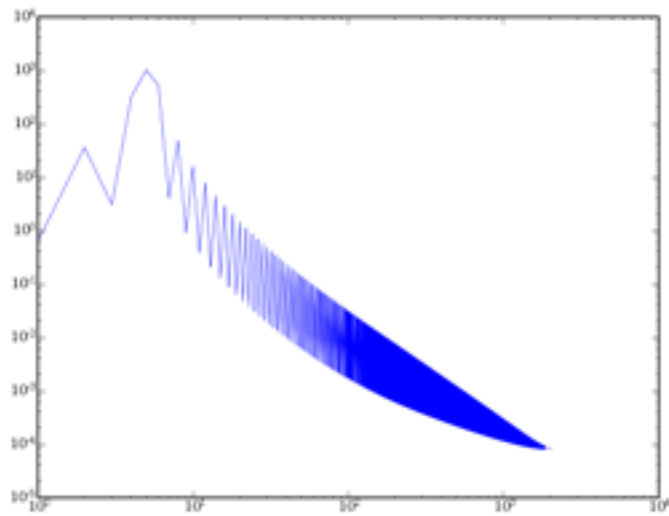
La fenêtre de Bartlett



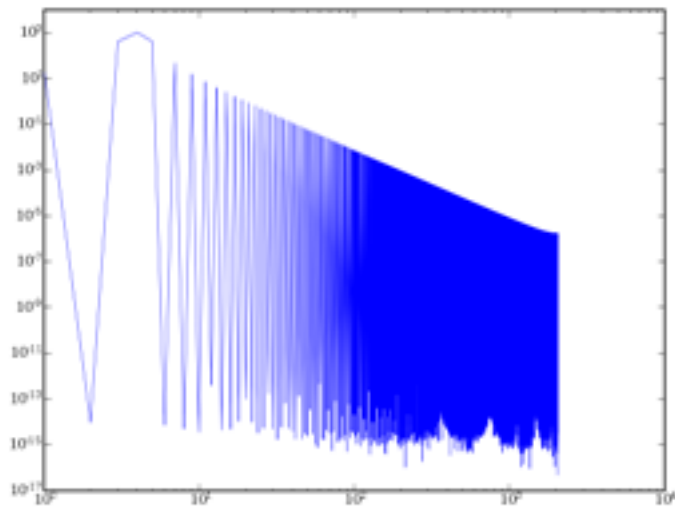
Transformée de Fourier de la fenêtre de Bartlett



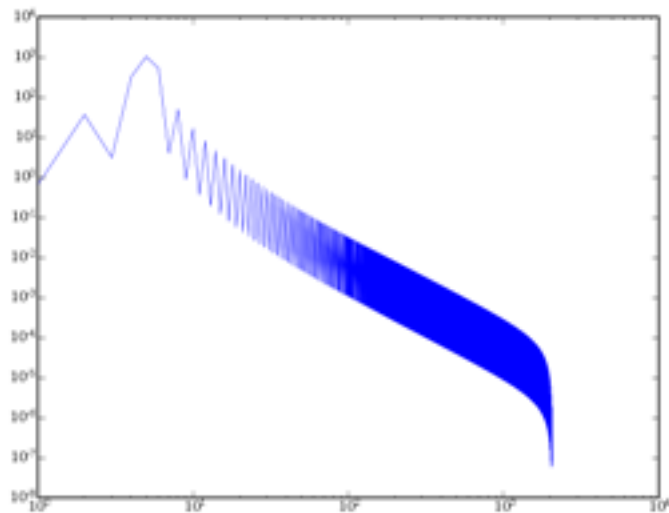
Transformée de Fourier d'un sinus avec une fenêtre de Bartlett



Transformée de Fourier d'un sinus tronqué avec une fenêtre de Bartlett



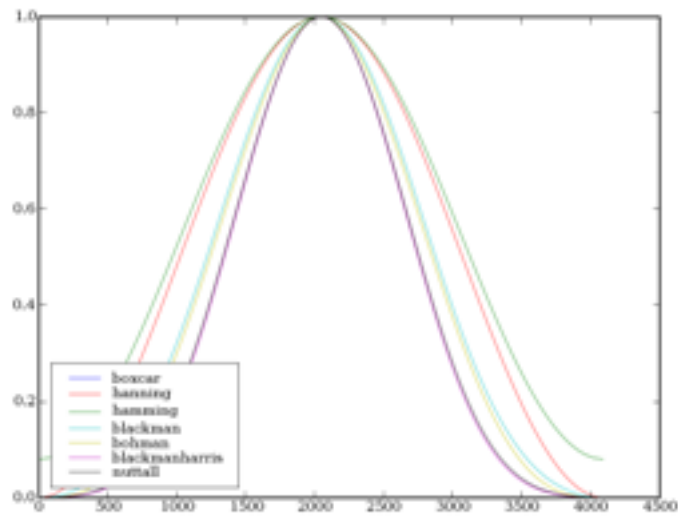
Transformée de Fourier d'un sinus avec une fenêtre triangulaire



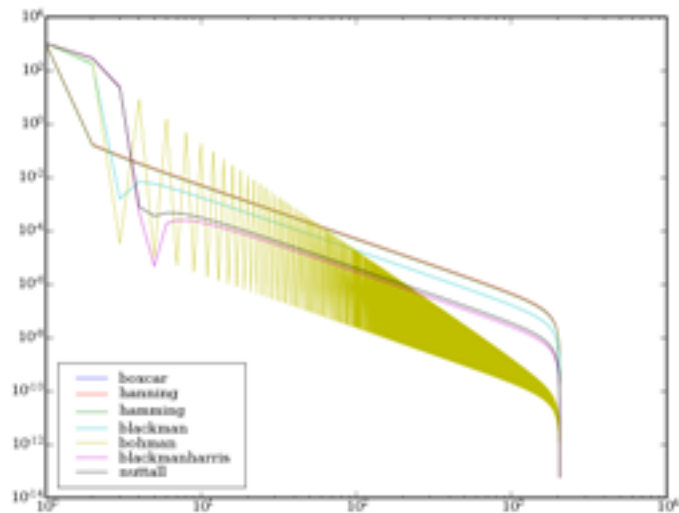
Transformée de Fourier d'un sinus tronqué avec une fenêtre triangulaire

II-B-5 - Résumé

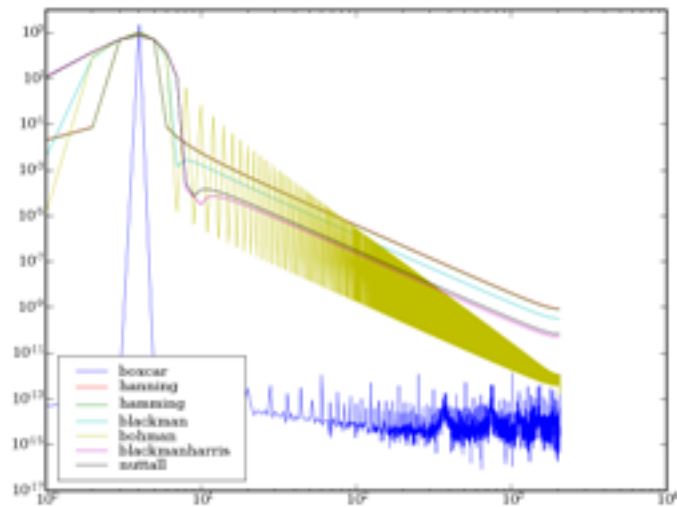
De nombreuses autres fenêtres existent, certaines possèdent des paramètres de taille permettant de sélectionner la région la plus intéressante du signal (sachant que cela a une influence alors sur les lobes secondaires et la taille du lobe principal).



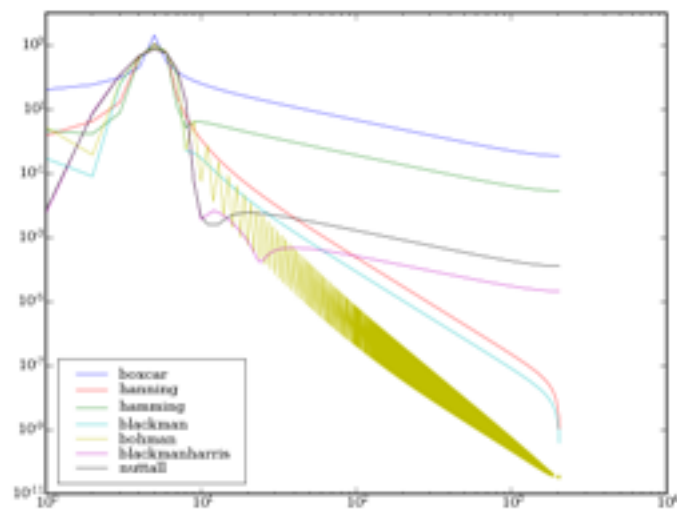
Différentes fenêtres



FFT de différentes fenêtres



FFT d'un sinus avec différentes fenêtres



FFT d'un sinus tronqué avec différentes fenêtres

Si un sinus pur est parfaitement décrit par la FFT sans fenêtrage (ou alors avec fenêtrage rectangulaire), le cas d'un sinus tronqué montre clairement les avantages de ces fenêtres : certains ont un amortissement très rapide, mais au prix d'un lobe principal très large, donc avec une moins bonne précision sur la fréquence du sinus. Tout n'est que compromis.

III - La transformée de Fourier rapide (Cooley-Tukey)

Jusqu'à l'invention, ou plutôt la réinvention, de cet algorithme découvert initialement par **Gauss**, le calcul de la transformée de Fourier était en $O(n^2)$. L'amélioration de l'algorithme est permis grâce à la factorisation récursive de la formule générale.

L'algorithme original de **Cooley-Tukey** était dit *radix-2*. Cela signifie que la dimension était une puissance de 2, et la factorisation à l'échelle k fait appel à 2 transformées de Fourier à l'échelle $k-1$. D'autres algorithmes par la suite ont d'autres *radix* pour des tailles qui ne sont pas des puissances de 2. Le meilleur site à ce sujet est celui de la **FFTW**.

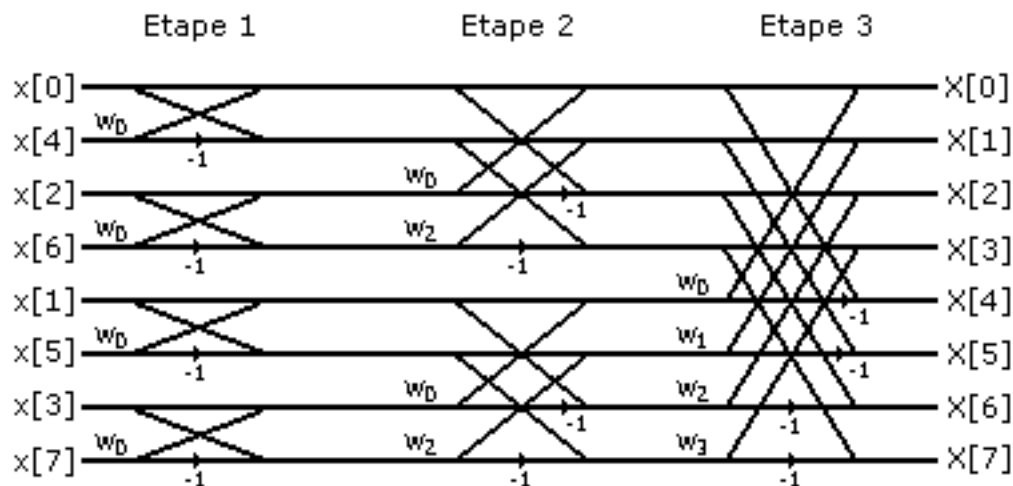
Voici comment on arrive à la décomposition récursive :

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2i\pi}{N} nk} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{\frac{-2i\pi}{2N} (2mk)} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{\frac{-2i\pi}{M} ((2m+1)k)} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{\frac{-2i\pi}{M} (mk)} + e^{\frac{i\pi}{M} k} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{\frac{-2i\pi}{M} (mk)}
 \end{aligned}$$

Une autre propriété est la suivante :

$$\begin{aligned}
 X_{k+M} &= \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{\frac{-2i\pi}{M} (m(k+M))} + e^{\frac{i\pi}{M} (k+M)} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{\frac{-2i\pi}{M} (m(k+M))} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{\frac{-2i\pi}{M} (mk)} - e^{\frac{i\pi}{M} k} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{\frac{-2i\pi}{M} (mk)}
 \end{aligned}$$

On effectue donc une FFT de taille inférieure sur les échantillons pairs et une autre sur les impairs à un facteur d'échelle près. La formule du *radix-2* met en évidence une cellule de base qu'on appelle *butterfly* (on calcule simultanément 2 coefficients de la FFT en prenant en compte la différence de signe des termes de la formule). On voit dans l'image suivante l'utilisation de ce *butterfly* pour résoudre ce problème.



On peut réaliser la FFT entre 2 espaces mémoires distincts ou en place, en écrasant le signal précédent. Dans ce cas, le résultat ne sera pas dans l'ordre et pour le retrouver, il faut permuer les bits des indices du tableau, comme indiqué dans le schéma précédent. Si un indice a la forme $b3b2b1b0$, l'indice dans la FFT correspondant est $b0b1b2b3$. C'est ce qu'on appelle le **bit-reversal**.

Pour la transformée inverse, on procède de la même manière avec l'exponentielle inverse. Dans les formules présentées, le facteur général de la FFT inverse n'est pas présenté. Il est possible de l'appliquer à la transformée directe, ou même en partie à la transformée directe et en partie à la transformée indirecte. Cela peut être judicieux - et indispensable en fait - dans le cas d'une FFT d'entiers.

CI - Conclusion

La présentation de la FFT ainsi que des outils indispensables pour l'utiliser, est maintenant finie, si vous désirez une utilisation, regardez le tuto de Florent sur FFTW ou dans le code utilisé pour générer les images pour Python.

Le code utilisé pour générer les images du fenêtrage est disponible [ici](#).

Ref - Références

 *Utilisation de la bibliothèque fftw (transformation de Fourier) pour le traitement des images*

 *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*

 *Numerical Analysis: A fast fourier transform algorithm for real-valued series*

 *Discrete-Time Signal Processing*

 *La bibliothèque FFTW*

